4.4.21 Nepřímá úměrnost I

Předpoklady: 040420

Př. 1: Která z následujících slovních úloh popisuje nepřímou úměrnost? Zapiš nepřímou úměrnost jako funkci.
a) 7 rohlíků stojí 21 Kč. Kolik bude stát 11 rohlíků?
b) Pokud se na kytku složí pouze 24 žáků přítomných ve třídě, bude každého z nich stát 27 Kč. Kolik by každého žáka stála, kdyby se složilo všech 32 žáků ve třídě?
c) Sešit, který si na matematiku koupilo 14 žáků ze třídy, v obchodě stojí 12 Kč. Kolik Kč by sešit stál, kdyby si ho koupilo 21 žáků ze třídy?

Jedinou nepřímou úměrností je příklad v bodu b) (čím více žáků se složí na zakoupení kytky, tím menší cenu každý z nich zaplatí).

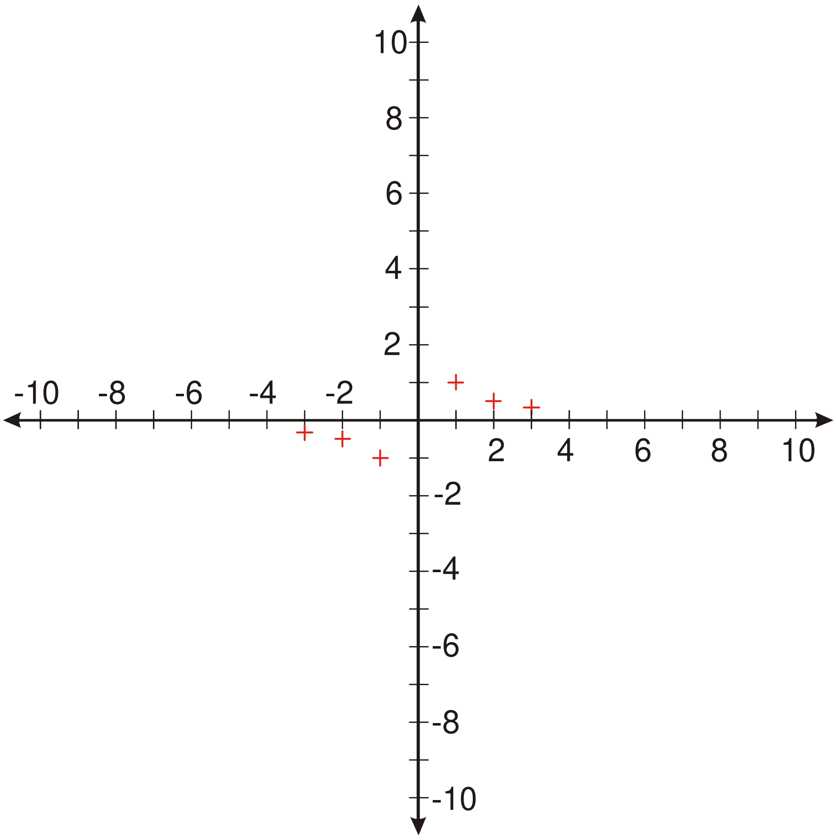
Závislost ceny na počtu přispívajících žáků bychom mohli napsat jako $y=\frac{24\cdot 27}{x}=\frac{648}{x}$.

Př. 2: Najdi nejjednodušší nepřímou úměrnost. S pomocí tabulky načrtni graf této funkce. Urči její vlastnosti ($D(f)$, $H(f)$, …).

Nejjednodušší nepřímá úměrnost: $y=\frac{1}{x}$.

Tabulka hodnot:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$



Obrázek zatím nevypadá moc úplně. Zdá se, že pro velká x se hodnoty blíží nule (čím větší hodnoty budeme dosazovat za x, tím menší budeme získávat hodnoty y, ale stále to budou kladná čísla). Jak vypadá graf v okolí nuly?

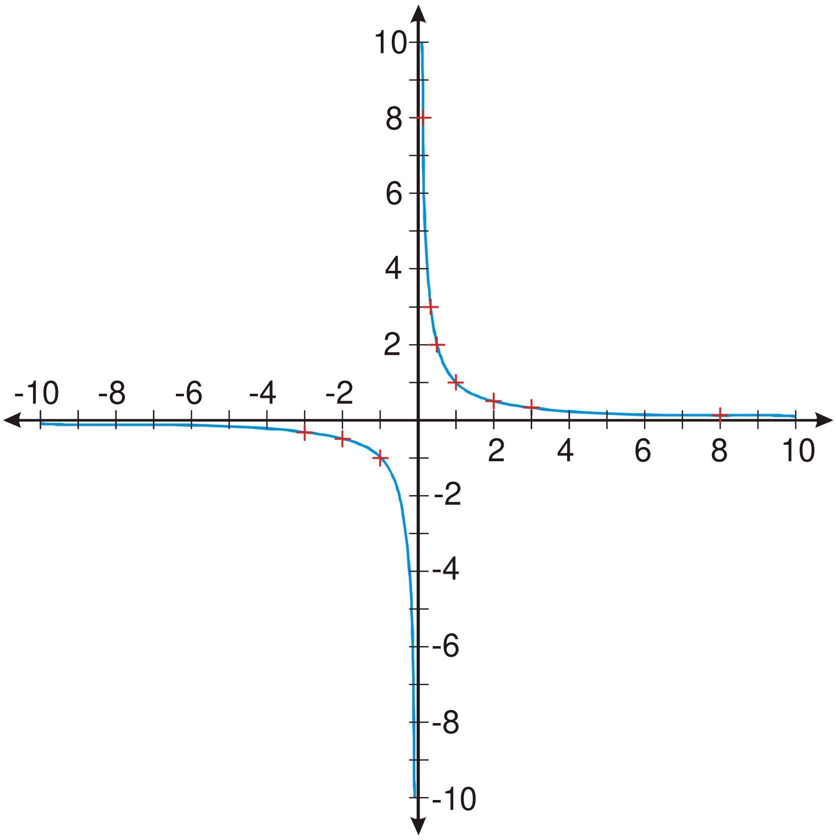
Stačí přidávat sloupce pro kladné hodnoty, graf je souměrný podle počátku.

Prozkoumáme chování funkce pro $x \in (0;1)$.

x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	8
y	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	8	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$

Když se hodnoty x blíží k nule (a jsou kladné), hodnoty y se blíží k nekonečnu.

Když se hodnoty x blíží k nule (a jsou záporné), hodnoty y se blíží k minus nekonečnu.



Vlastnosti: $D(f)=R-\{0\}$, $H(f)=R-\{0\}$, funkce je klesající v intervalech $(-\infty;0)$ a $(0;\infty)$.

Pedagogická poznámka: Většina žáků nakreslí graf správně, mnozí však spojí body $[-1;-1]$ a $[1;1]$ přímou čarou a moc se nezajímají o to, jak bude funkce v okolí nuly vypadat. V takovém případě se snažím tlačit zahuštění tabulky o hodnoty, které jim chybějí k představě grafu a k představování si hodnot, který by získali z dalších čísel podobných číslům v tabulce.

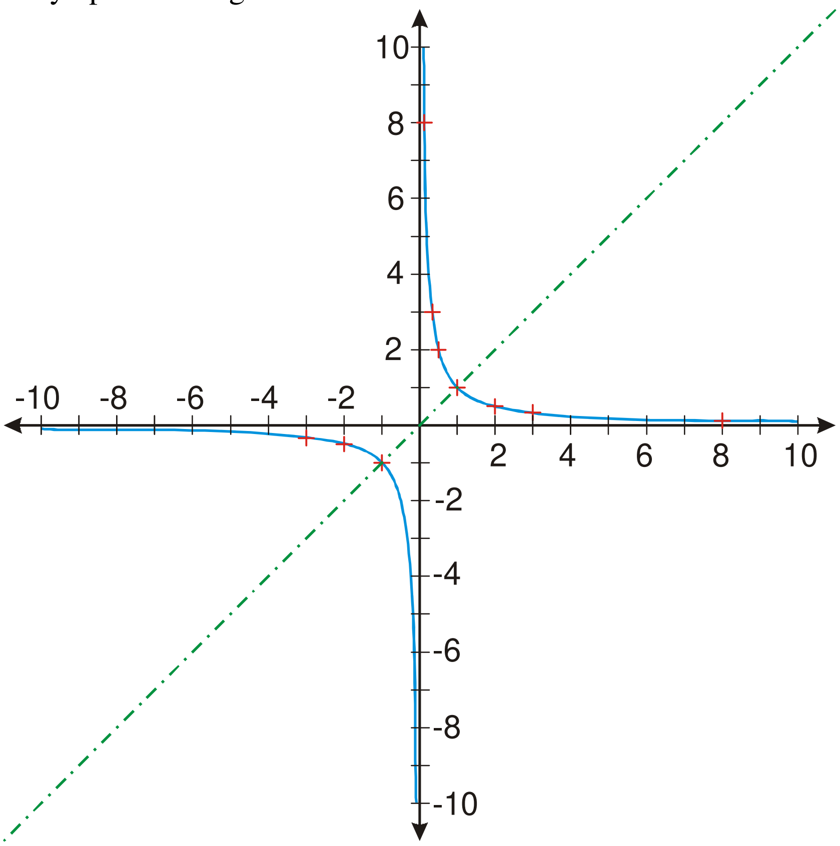
Př. 3: Graf funkce druhá mocnina $y=x^2$ byl osově souměrný podle osy *y*, protože hodnoty navzájem opačných čísel se rovnaly (platilo $f(x)=f(-x)$). Pokus se najít podobnou vlastnost u nepřímé úměrnosti.

Graf nepřímé úměrnosti má dva druhy souměrnosti.

Graf je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic (podle bodu $[0;0]$).
Z kladných hodnot *x* získáváme kladné hodnoty *y*, ze záporných hodnot *x* záporné hodnoty *y*.
Například: $[1;1]$ a $[-1;-1]$ se liší jen ve znaménkách, stejně tak $\left[2;\frac{1}{2}\right]$ a $\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$ nebo $\left[\frac{1}{3};3\right]$ a $\left[-\frac{1}{3};3\right]$.

Z opačného čísla získáme stejnou hodnotu, ale s opačným znaménkem (můžeme to zapsat jako $f(-x) = -f(x)$ (konkrétně například $-\frac{1}{3} = f(-3) = -f(3) = -\frac{1}{3}$).

Graf je osově souměrný podle grafu funkce $y = x$. Pokud prohodíme x a y, získáme bod, který opět leží na grafu.



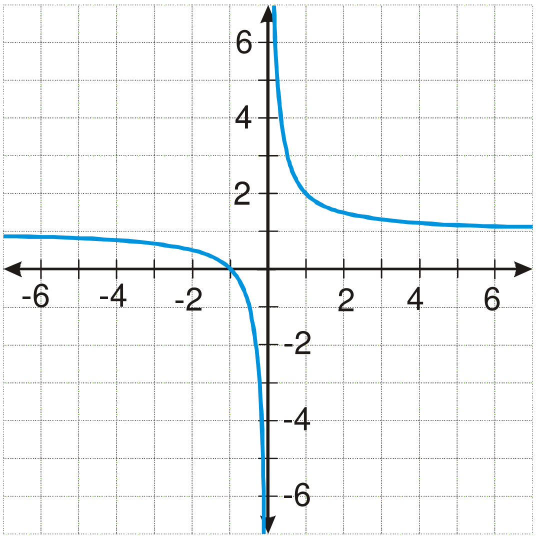
Jako nepřímou úměrnost označujeme funkci $f: y = \frac{k}{x}$, $x \in R - \{0\}$, kde k je nenulové reálné číslo zvané koeficient nepřímé úměrnosti f. Grafem nepřímé úměrnosti je hyperbola.

Př. 4: Nepřímá úměrnost je (podobně jako druhá mocnina je speciálním případem kvadratické funkce) speciálním případem lineární lomené funkce (každá funkce, zapsatelná ve tvaru $y = \frac{ax+c}{bx+d}$). Nakresli grafy lineárních lomených funkcí (příklad se snaž vyřešit bez tabulky s vypočtenými hodnotami pouze porovnáním s grafem nepřímé úměrnosti). Urči definiční obory a obory hodnot.

a) $y = \frac{1}{x} + 1$ b) $y = \frac{1}{x} - 2$ c) $y = \frac{1}{x} + \sqrt{5}$

a) $y = \frac{1}{x} + 1$

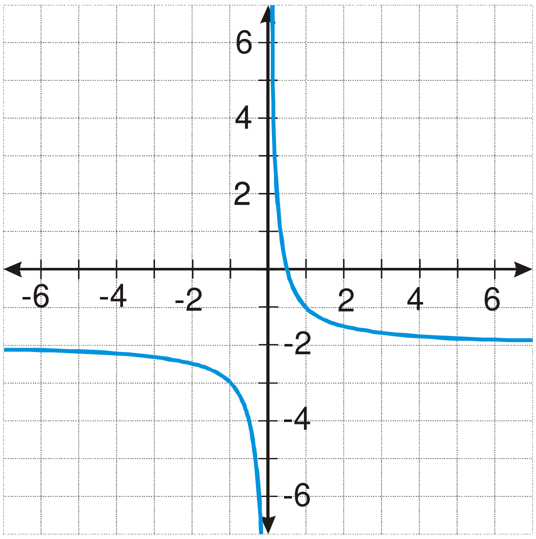
Hodnoty funkce $y=\frac{1}{x}+1$ jsou o jedna větší než odpovídající hodnoty funkce $y=\frac{1}{x}$ (kvůli přičtení jedničky) $\Rightarrow$ graf funkce $y=\frac{1}{x}+1$ je vůči grafu funkce $y=\frac{1}{x}$ posunutý o 1 nahoru.



$D(f)=R-\{0\}$, $H(f)=R-\{1\}$

b) $y=\frac{1}{x}-2$

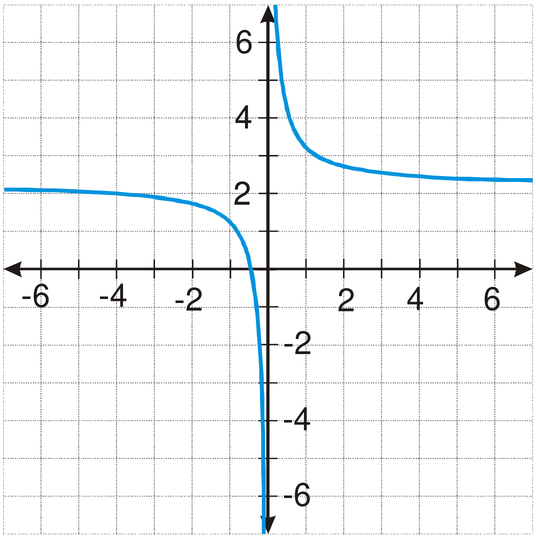
Hodnoty funkce $y=\frac{1}{x}-2$ jsou o dvě menší než odpovídající hodnoty funkce $y=\frac{1}{x}$ (kvůli odečtení dvojky) $\Rightarrow$ graf funkce $y=\frac{1}{x}-2$ je vůči grafu funkce $y=\frac{1}{x}$ posunutý o 2 dolů.



$D(f)=R-\{0\}$, $H(f)=R-\{-2\}$

c) $y=\frac{1}{x}+\sqrt{5}$

Hodnoty funkce $y=\frac{1}{x}+\sqrt{5}$ jsou o $\sqrt{5}$ větší než odpovídající hodnoty funkce $y=\frac{1}{x}$ (kvůli přičtení $\sqrt{5}$) $\Rightarrow$ graf funkce $y=\frac{1}{x}+\sqrt{5}$ je vůči grafu funkce $y=\frac{1}{x}$ posunutý o $\sqrt{5}$ nahoru.



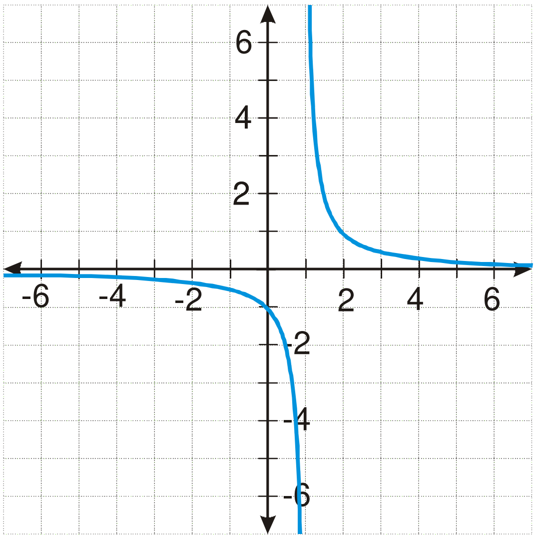
$D(f)=R-\{0\}$, $H(f)=R-\{\sqrt{5}\}$

Př. 5: Nakresli grafy lineárních lomených funkcí (případ se snaž vyřešit bez tabulky s vypočtenými hodnotami, pouze porovnáním s grafem nepřímé úměrnosti). Urči definiční obory a obory hodnot.

a) $y=\frac{1}{x-1}$ b) $y=\frac{1}{x+2}$ c) $y=\frac{1}{x-3}+2$

a) $y=\frac{1}{x-1}$: $x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$

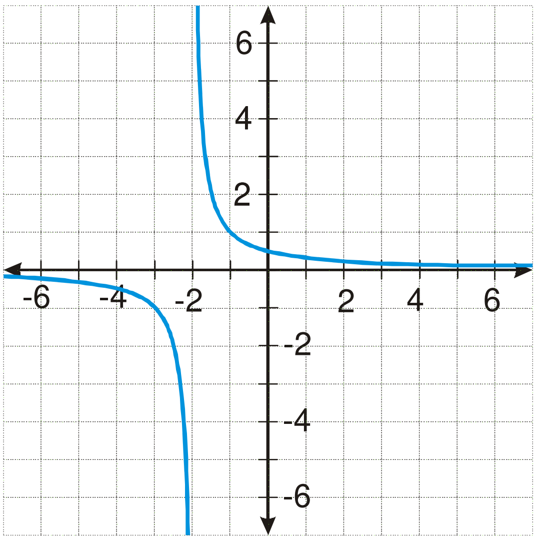
Hodnotu, kterou dosazujeme do funkce, nejdříve zmenšíme o jedna (odečtení jedničky ve jmenovateli), teprve pak získanou hodnotou dělíme (u původní funkce $y=\frac{1}{x}$ dělíme původní dosazenou hodnotou) $\Rightarrow$ do funkce $y=\frac{1}{x-1}$ musíme dosadit číslo o 1 větší než do funkce $y=\frac{1}{x}$, abychom získali stejnou hodnotu y $\Rightarrow$ graf funkce $y=\frac{1}{x-1}$ bude posunutý o 1 doprava.



$D(f) = R - \{1\}$, $H(f) = R - \{0\}$

b) $y = \dfrac{1}{x+2}$: $x+2 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq -2$

Hodnotu, kterou dosazujeme do funkce, nejdříve zvětšíme o dvě (přičtení dvojky ve jmenovateli), teprve pak získanou hodnotou dělíme (u původní funkce $y = \dfrac{1}{x}$ dělíme původní dosazenou hodnotou) $\Rightarrow$ do funkce $y = \dfrac{1}{x+2}$ musíme dosadit číslo o 2 menší než do funkce $y = \dfrac{1}{x}$, abychom získali stejnou hodnotu y $\Rightarrow$ graf funkce $y = \dfrac{1}{x+2}$ bude posunutý o 2 doleva.

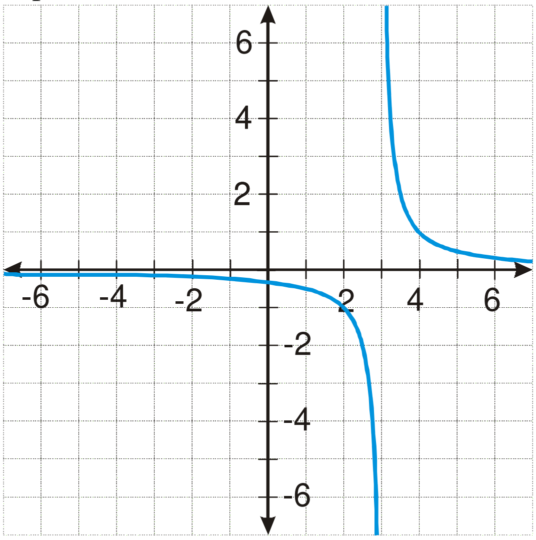


$D(f) = R - \{-2\}$, $H(f) = R - \{0\}$

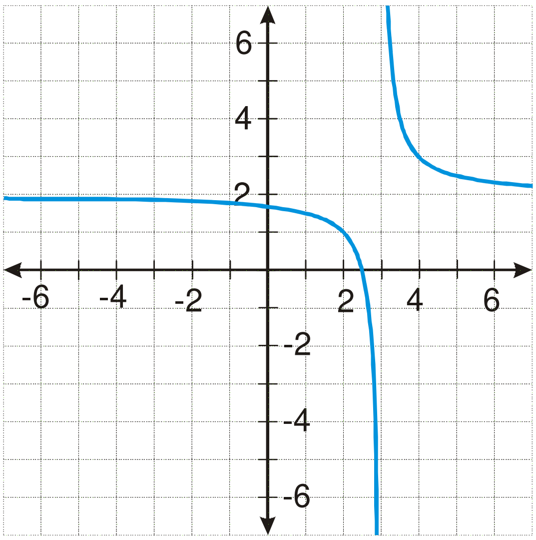
c) $y = \dfrac{1}{x-3} + 2$: $x-3 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq 3$

Graf kreslíme postupně.

Hodnotu, kterou dosazujeme do funkce, nejdříve zmenšíme o tři (odečtení trojky ve jmenovateli), teprve pak získanou hodnotou dělíme (u původní funkce $y=\frac{1}{x}$ dělíme původní dosazenou hodnotou) $\Rightarrow$ do funkce $y=\frac{1}{x-3}$ musíme dosadit číslo o 3 větší než do funkce $y=\frac{1}{x}$, abychom získali stejnou hodnotu y $\Rightarrow$ graf funkce $y=\frac{1}{x-3}$ bude posunutý o 3 doprava.



Hodnoty funkce $y=\frac{1}{x-3}+2$ jsou o dvě větší než odpovídající hodnoty funkce $y=\frac{1}{x-3}$ (kvůli přičtení dvojky) $\Rightarrow$ graf funkce $y=\frac{1}{x-3}+2$ je vůči grafu funkce $y=\frac{1}{x-3}$ posunutý o 2 nahoru.



$D(f)=R-\{3\}$, $H(f)=R-\{2\}$

Shrnutí: Grafem nepřímé úměrnosti je hyperbola (pro velká x se blíží k nule, pro malá kladná x se blíží k nekonečnu).